Les puissances

I Puissance d'un nombre rationnel :

1 Puissance d'exposant positif

Définition

a est un nombre rationnel et ***n*** un entier naturel ***non nul*** :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et par convention : } a^0 = 1$$

a^n (lu « ***a* puissance *n*** ») est appelé **puissance** n-ième de ***a***
et ***n*** est appelé l'**exposant**.

Remarque : Pour tout nombre rationnel ***a*** : $a^1 = a$

Pour tout nombre ***a*** non nul : $a^0 = 1$

Exemples : $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ et $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

$7^1 = 7$ et $-8^1 = -8$ $\quad 2^0 = 1$ et $(-13)^0 = 1$

B Puissance d'exposant négatif

Définition

a est un nombre rationnel non nul et ***n*** un entier naturel :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple : $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5}\right) = \frac{8}{125}$

Remarque : a^{-1} est l'inverse de a et $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Exercice d'application 1 : ***Calculer les puissances suivantes***

$(-71{,}4)^0$; 1^{14} ; $(-1)^7$; 0^{18} ; $(-1)^{12}$; 5^{-3} ; $\left(\frac{15}{20}\right)^{-2}$; 7^{-1}

II Signe d'une puissance

Propriété Pour tout nombre entier relatif ***n***,

- **Si** ***a* est *positif* alors** a^n ***est positif.***
- **Si** ***a* est *négatif* alors** a^n ***est positif lorsque l'exposant n est pair.***

  est négatif lorsque l'exposant n est impair.

Exemple : Quel est le signe de $\left(-\frac{7}{3}\right)^{12}$ et $\left(\frac{11}{-5}\right)^{23}$?

- *Comme* $\left(-\frac{7}{3}\right)$ *est **négatif** et l'exposant **12** est **pair**,* $\left(-\frac{7}{3}\right)^{12}$ est **positif**.
- *Comme* $\left(\frac{11}{-5}\right)$ *est **négatif** et l'exposant **23** est **impair**,* $\left(\frac{11}{-5}\right)^{23}$ est **négatif.**

Remarque : $(-7)^2 \neq -7^2$ **car :** $(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$ et $-7^2 = -(7 \times 7) = -49$

III Propriétés et règles

Propriété 1 *Soient **a** et **b** des nombres rationnels non nuls,*

*Pour tous nombres entiers relatifs **m** et **n** : :*

	Propriété	Exemple
Produit de deux puissances de même base	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$
Quotient de deux puissances de même base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{15^7}{15^{11}} = 15^{7-11} = 15^{-4} = \frac{1}{15^4}$
Puissance d'une puissance	$(a^n)^m = a^{n\times m}$	$\left(\left(-\frac{5}{7}\right)^4\right)^6 = \left(-\frac{5}{7}\right)^{4\times 6} = \left(-\frac{5}{7}\right)^{24}$
Produit de deux puissances de même exposant	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{15}{14}\right)^3$
Quotient de deux puissances de même exposant	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$

Exercice d'application 2 :

Simplifier :

$(-7)^{12} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{12}$; $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-7}$

$\frac{8^3}{8^{-3}}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 6^5$; $\left((-3)^2\right)^{-2}$

IV Puissances de 10

1 Définition

Définition Pour tout nombre entier positif non nul n :

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ et par convention $10^0 = 1$

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemples : $10^4 = 10\ 000$ et $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000001$

2 Calculs avec les puissances de 10

Propriétés Pour tous nombres entiers relatifs m et n :

$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ et $(10^m)^n = 10^{m \times n}$

Exemples :

- $A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\ 000\ 000$
- $B = (10^3)^{-2} = 10^{3 \times (-2)} = 10^{-6} = 0{,}000001$

V Écriture scientifique

Définition Tout nombre décimal relatif non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$ ou $-a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$, et où n est un nombre entier relatif.

Exemples :

- Âge de la Terre : 4 500 000 000 ans = $4{,}5 \times 10^9$ ans
- Rayon d'un atome : 0,000 000 000 529 m = $5{,}29 \times 10^{-10}$ m
- Distance Terre-Soleil : 149 600 000 000 m = $1{,}496 \times 10^{11}$ m

Exercice d'application 3 :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

-258000 ; $0{,}0000147$

$352{,}774$; $-0{,}00212$